分数の概念獲得の過程

小　林　　厚　子*

＜要約＞

分数概念の獲得については、具体的な個別単位と普遍単位の両方について、「元になる単位量をいくつに分けた１つ分」からはじめるべきと考える。「分数で表される量」の理解の後に、「分数」という抽象概念が獲得される。続いて、単位分数でない一般の分数を、「いくつに分けたいくつぶん」として導入する。必然的に、仮分数、帯分数、整数になる場合の概念が獲得される。続いて、数の割り算の結果が分数で表されるという、割り算と分数の同一性の概念獲得へと進む。さらには、日常的な分数の活躍する場である、「ある量の何分のいくつ」が、「ある量に分数をかける」と同一であるという一段高い概念獲得へと進める。このような過程について、例題をあげて述べる。

〔キーワード〕子ども、分数概念、認知発達心理学、例題

はじめに

近年、日本の子ども達において、算数・数学の能力が低下していることが指摘されてきている。学業不振のため、教室で授業を受けることが苦痛な児童・生徒は、登校渋りや不登校に繋がっている例も多い。また、大学生でも分数や少数の計算ができない、などの事例からは、学び方に問題があったといえよう。

人類の知的発達、文明の発達の中で、数概念の獲得・数表現の発達は大きな意味を持ってきた。人類はどのようにして数を認識してきたのかと同時に、子ども達は成長と教育の中で、どのように数の概念を獲得し、活用できるようになっていくのかという課題についても、これまでの膨大な研究成果がある。さらに、どのような内容の指導方法によって子どもが数の学習を興味を持って学習し続けられるのかという実践的な課題は教育の現場における課題でもある。このような研究のひとつの端緒となったのは、Piagetの研究であり、代表作は「数の発達心理学」、「量の発達心理学」にまとめられている。それ以前の、KantやHegelの「量の理論」も踏まえて、現代の課題を考慮して、「数の認知発達心理学」の視点から検討することは意義のあることといえよう。ここで、小学校の算数でもっとも難しいとされる、「分数」について、試論を述べる。数年前から、「分数のできない大

*Atsuko KOBAYASHI　臨床心理学科（Department of Clinical Psychology）

学生」がマスコミをにぎわせているし、実際、大人でも、分数概念をきちんと理解している場合は少ない。「分数で割ることはひっくり返してかけること」を説明できる人は少ない。本論では、「分数とは何か、分数の演算の意味、分数の学習・指導原理と体系」について、論考する。算数嫌いな児童生徒にならないような指導書として、参考にできるように試みる。

(1)「分数で表される量」と「分数」、「単位分数」

数の「３」は、それ自体としては現実に存在するものではなく、「りんご３個」、「３冊の本」、「３人の子供」・・・・・等の「量」に共通に含まれている、「大きさの側面」を抽象概念として表したものである。抽象概念の数「４」から、「４グラムの塩」「４メートルの紐」「４時間」といった「具体量」が表現できるのである。このような、「数と量との関連」は、「数の認知発達心理学」の重要な基礎であるが、ここではその一般論を展開せず、それを基礎として、分数について、「分数で表せる量」と「分数」の関連を明示しておきたい。

１つのりんごを４人で分けるとき、同じ大きさになるように分ける（りんごの絵で示すとよい)。

これらを少しチャート化し、「りんごを真上から見てみると、次の絵のようになっています。」とする（図で示す)。

このとき、りんご１個を４つに等しく分けた一つ分を、「りんご１個の４分の１」または、「４分の１個のりんご」と表現する。数字を使って次のように記述する。

「 りんご１個の$\frac{1}{4}$」

または、「$\frac{1}{4}$個のりんご 」

ここで大事なのは、元になる量が、「１個のりんご」という具体量であること。りんごの大きさは個々のりんごでかなりの差があることに注意し、「１個のりんご」というのは、いわゆる「個別単位」であることを明確にする。個々の個別単位を基にして、それらの「単位量を４つに分けた１つ分」という量が認識されるのである。このような事情は、「２個のりんご」についてもいえることで、りんごの大きさはさまざまであるから、同じ「２個のりんご」といっても、重さからみれば２～３倍ぐらいの差があることで、分数特有のことではないのであるが。

次には、１メートルのひもを４つに分けたときも、同じように表現できることを扱う。４つに分けた１つ分のひもの長さは、「１メートルの４分の１」または、「４分の１メートル」と言い、次のように表す。

「１メートルの$\frac{1}{4}$」

または、「$\frac{1}{4}$メートル」

「１ｍの$\frac{1}{4}$」または、「$\frac{1}{4}$ｍ」

りんごの場合との違いは、元になる量がいわゆる「普遍単位」である点だけである。しかし、普遍単位を基にした場合は、世界のあらゆるところで共通の量として認識できることになる。「２個のりんご」、「２冊の本」、「２㎞」、「２時間」　などから、大きさの部分を表す「数の２」が抽象化された概念として現れてきた。

それと同様に、「$\frac{1}{4}$個のりんご」、「$\frac{1}{4}$ｍ」から、数としての分数「$\frac{1}{4}$」が抽象概念として認識される。「２個のりんご」、「２冊の本」は「整数を使って表された量」であり、同様に、「$\frac{1}{4}$個のりんご」、「$\frac{1}{4}$ｍ」などは、「分数を使って表された量」、「分数を使って表されたはんぱな量」ということになる。簡潔に、「分数量」と表すのが合理的であり、これまで、「量分数」という用語が使われることがあったが、不適切

な用語といえよう。量と数の関係を混乱させかねないからである。「量分数」という用語が好ましくない用語であることは、「量整数」とは言わないことからも明らかなことである。「２グラム」などは、整数を使って表されている量であるから、「整数量」と表現するのが合理的である。

「$\frac{1}{4}$」は、あるものを「４つに等しく分けた１つ分」を表している。「あるもの」にくるのは、個別の量であってもよいし、普遍単位で表された量でもよい。単位量１をいくつかに分けた１つ分を表す分数を、「単位分数」という。分数の導入は、分数の基本となる「単位分数」から導入するのが子どもの認知過程から考えてももっとも自然である。

「あるもの（個別単位でも普遍単位でも）を４つに分けた１つ分」であるから、それを４つ集めれば、「あるもの、つまり元の単位量」になることも当然のことである。もともとあった「はんぱな量」の大きさがわからず、４つ集めてみたら単位量になったとき、「はんぱな量を$\frac{1}{4}$という」といっても同じことである。このような考えは、「はんぱな量で単位量を測る」思考作業でもある。はんぱな量で単位量を評価したら、４つで単位量になったということと、そのはんぱな量が、単位量を４つに分けた１つ分であることとは、完全に同等の事柄である。

子どもへの問いかけとしては、次のような問題が適切と思われる。

問１　次の量を分数を使って表しましょう。

①　ようかん１本を５つに等しく分けた１つ分。

②　１㎞を10個に等しく分けた１つ分

③　１本の丸太を６つに等しく切った１つ分

④　１時間を等しく２つに分けた１つ分の時間

問２　分数を使って表される量を、自分で５つ以上考えましょう。

問３　$\frac{1}{4}$はあるものを４つに等しく分けた１つ分を表す分数です。$\frac{1}{7}$はあるものを７つに等しく分けた１つ分を表す分数です。同じようにして分数を10個以上作ってみましょう。

(2) 分数の大きさをくらべる

分数は量の大きさを表すことに使えるので、大小の比較ができる。「量」の概念には、「大小の比較ができる」ことが含まれているからである。

「２個のりんご」より、「５個のりんご」の方がたくさんある。「２ｍのひも」より、「５ｍのひも」の方が長いことは知っている。

「５個のりんご ＞ ２個のりんご」

「５ｍのひも ＞ ２ｍのひも」

５ ＞ ２

等と表すことを導入しておく。数学のいろいろな記号は、自然な形で早い時期から導入しても十分使えるのが普通である。むしろ、子ども達は興味を示し、使うことに喜びを感じるようである。単に言語で表現するより、頭脳の働きが整理され、論理的に考えられるようになる手助けとなるのである。もちろん複雑な記号を導入するのは逆効果であるが。

同じ大きさのりんごを、「２つに分けた１つ分」と、「５つに分けた１つ分」ではどちらが多いでしょうか？と問いかける。実際にりんごを分けてみればすぐわかるし、絵をかいてもすぐわかる。ひもの長さでも同じで、実際に２つに分けたひもと、５つに分けたひもを比べてみるとよい。「こまかく、たくさんに分ければそれだけ少しに“小さく”なってしまう。」という認識はかなり年齢が低い段階から理解できることである。

$\frac{1}{2}$個のりんご＞$\frac{1}{5}$個のりんご

$\frac{1}{2}$mのひも＞$\frac{1}{5}$mのひも

$\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$

ここで、再び注意しなければならないのは、「元になる単位量が同じ」という条件が満たされていなければならないということである。「３頭の象＞２頭の象」についてさえ、３頭の象が小さい赤ちゃん象で、２頭の象が大人の象であれば、体重についてみれば、「２頭の象」の方がはるかに大きいのである。「３頭の象＞２頭の象」というときは、ほぼ同じ大きさの象について考えているのか、そうでなければ、体重や大きさを捨象した、１個の生命体としての象を対象としているのかが前提になっている。

「$\frac{1}{2}$個のりんご＞$\frac{1}{5}$個のりんご」

というときも、「同じ大きさのりんごが元」になっていることを確認しておく必要がある。普遍単位を基にして、

「$\frac{1}{2}$mのひも＞$\frac{1}{5}$mのひも」

とするときはあまり問題にならないが、後で、いろいろな混乱の原因になりかねないからである。ましてや、抽象的な分数の大小比較、$\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$ではそのことが大事になってくる。

問１　次のものはどちらが大きいでしょうか？
＞　を使って表しましょう。

①　「$\frac{1}{4}$m」と、「$\frac{1}{7}$m」

②　同じ大きさのスイカについて、「$\frac{1}{5}$個のスイカ」と「$\frac{1}{8}$個のスイカ」

問２　次の分数を大きさの順に並べて、＞でつないでみましょう。

①　$\frac{1}{6}$と、$\frac{1}{7}$

②　$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{20}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{16}$

(3)「単位分数でない分数」の導入

大きなピザを５つに等しく分けました。大口君は身体が大きいので２人分を食べてよいことになりました。普通の人の分は、$\frac{1}{5}$ですが、大口君の食べたのはその２倍で、次のように表します。

$\frac{1}{5}$個のピザ×２＝$\frac{2}{5}$個のピザ

つまり、「$\frac{2}{5}$個のピザというのは、１個のピザを５つに分けた２つ分のピザ」のことです。
ここで出てきた、$\frac{2}{5}$も分数と言う。

ピザは個別単位であるが、普遍単位でも同じである。

$\frac{2}{3}\ell$を導入するには、すでに分数の基本として導入した単位分数量$\frac{1}{3}\ell$を使うのが自然な理解に結びつく。すなわち、「$\frac{2}{3}\ell$は、$\frac{1}{3}\ell$を２つ集めたもの」とするのである。「元の単位となる量を３つに分けた２つ分の量」とするのである。

ある量を元にして、それの２つ分を求める演算は、「かけざん」である。

$3\ \ell/\text{m}^2\times 4\ \text{m}^2=12\ \ell$

$3\ \ell\times 4=12\ \ell$

この考えを分数量にも適用すると、次のようになる。

$\frac{1}{3}\ell\times 2=\frac{2}{3}\ell$

$\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

この演算は、分数×整数の基礎となるものである。

これで、単位分数以外の一般の分数が導入された。中心線の下にある数が、「いくつに分けたか」を表す数で、「分母」と呼ばれる。中心線の上にある数が、「いくつ集めたか」を表す数で、「分子」と呼ばれることも導入する。

問１　大口さんは、大きなようかんを８個に分けてそのうち３つ分を食べました。大口さんの食べたようかんを分数で表しましょう。

問２　小口さんは、１ℓの牛乳を10等分してそのうち３つ分を飲みました。小口さんの飲んだ

牛乳の量を分数を使ってあらわしましょう。

問３　①　１mを５つに分けた３つ分の長さは、どのような分数で表されるでしょうか。

②　１個のスイカを10に分けた３つ分は、どのような分数で表せるでしょうか。

③　数の１を、７つに分けた３つ分は、どのような分数になるでしょうか。

問４　①　$\frac{2}{3}$kgは、１kgをいくつに分けたものをいくつ集めたものでしょうか。

②　ようかん１本の$\frac{3}{5}$というのは、ようかんをいくつに分けたものをいくつ集めたものでしょうか。

③　$\frac{7}{10}$という分数は、数の１をいくつに分けたいくつ分でしょうか。

問５　①　次の分数の、分母と分子はいくつでしょうか。

$\frac{2}{9}$、$\frac{4}{13}$、$\frac{5}{17}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{6}{19}$

②　分母が８、分子が５の分数を書き表してください。

(4)「仮分数」、「帯分数」、「整数」となる場合

「単位になる量を、３つに分けたものを再び３つ集めたら、元の単位量になる」ことも認識が容易である。「３つ集める」演算はかけざんであるから、次の式が成り立つ。

$\frac{1}{3}\ell \times 3 = \frac{3}{3}\ell = 1\ \ell$

$\frac{1}{3} \times 3 = 1$

さらに、同じ大きさのりんごが２つ以上あるとき、それぞれのりんごを３つに分けておき、それらを４つ集めると、りんご１個より多くなる。

$\frac{1}{3}$個のりんご×４＝$\frac{4}{3}$個のりんご

$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$

このように、分子のほうが分母より大きな数の分数は、「仮分数」とよばれる。これに対して、今まで出てきた分数は、分子は分母より小さい分数で、「真分数」と呼ばれる。

「$\frac{1}{3}$個のりんご」を４つ集めるとき、３つ集めた段階で、１となるので、あと残りの１つ分で、$\frac{1}{3}$となる。このことは、次のように表せる。

$$\frac{1}{3} \times 4 = \frac{1}{3} \times (3 + 1) = 1 + \frac{1}{3}$$

このように、整数と分数を合わせたものを、$1\frac{1}{3}$と表して、「帯分数」という。仮分数は常に帯分数に表すことができる。仮分数の$\frac{17}{3}$を帯分数に直すには、$\frac{1}{3}$が３つ集まると１になるので、17の中に３がいくつ含まれているかを知ることが大事になる。これは、17を３で割ることによって得られる。17÷３は、商が５であまりが２である。つまり、17＝３×５＋２である。このことから、次のように帯分数に直せる。

$$\frac{17}{3} = \frac{3 \times 5 + 2}{3} = 1 \times 5 + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$$

$\frac{18}{3}$の場合には、18＝３×６で、３がちょうど６個あるので、次のように、仮分数は整数となってしまう。

$$\frac{18}{3} = \frac{3 \times 6}{3} = 1 \times 6 = 6$$

問１　次の分数を、真分数と仮分数に分類しましょう。

$\frac{8}{3}$、$\frac{4}{9}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{9}{10}$、$\frac{10}{9}$

問２　①　真分数の例を５つ、仮分数の例を５つ作ってみましょう。

②　仮分数が整数となってしまう例を５つ作ってみましょう。

問３　①　19を５で割ったときの、商とあまりを求めましょう。

②　①の結果を使って、仮分数$\frac{19}{5}$を帯分数に表しましょう。

③　仮分数$\frac{20}{5}$は整数で表せるでしょうか。表せるときはその整数を求めましょう。

問４　次の仮分数を、帯分数あるいは整数で表しましょう。

①$\frac{17}{9}$、②$\frac{8}{3}$、③$\frac{11}{2}$、④$\frac{15}{4}$

(5) 割り算と分数（ⅰ）$1 \div 4 = \frac{1}{4}$

割り算の意味を分析するには、割り算には2つの意味があることを確認しておかなければならない。

①　等分除と　②　包含除である。

①　の「等分除」は、「等しく分けた1つを求める計算」であり、「割り算の基本」である。例で示せば、「8本の鉛筆を4人で等しく分ける計算」であり、「1人当たり量を求める計算」である。「1人当たり量」は、高度な用語で表現すれば、「内包量」である。今の例でいえば、「8本割る4人」で、「1人当たり2本」を求めることになる。

「鉛筆8本÷4人＝鉛筆2本／人」

一般的には、

「外延量A÷外延量B＝内包量A／B」である。この考えをそのまま分数量に適用すると、次のようになる。

「りんご1個÷4人＝りんご$\frac{1}{4}$個／人」

同じように、ひもの長さという普遍量の場合は次のようになる。

「ひも1m÷4人＝ひも$\frac{1}{4}$m／人」

②　の「包含除」は、「鉛筆8本があり、一人当たり、鉛筆2本を配るとすると、何人に配れるか」を求める計算である。

「鉛筆8本÷鉛筆2本／人＝4人」

一般的には、

「外延量A÷内包量A／B＝外延量B」である。この考えをそのまま分数量に適用すると、次のようになる。

花壇の1㎡当たりに4 ℓの水をまくとする。今水が1 ℓしかないときに、何㎡の花壇に水がまけるかという問題である。図を描いて考えれば、1㎡を4つに分けた1つ分の花壇にしかまけないことがわかる。

「1 ℓ÷4 ℓ／㎡＝$\frac{1}{4}$㎡」

①、②いずれの意味に考えても、数の計算では次のようになる。

$$1 \div 4 = \frac{1}{4}$$

「分数」は、「割り算の結果」と等しいことが確認される。他の分数でも同じことで、$1 \div 7 = \frac{1}{7}$、$1 \div 9 = \frac{1}{9}$、$1 \div 3 = \frac{1}{3}$、$1 \div 5 = \frac{1}{5}$、$1 \div 10 = \frac{1}{10}$等が成り立つ。

問1　絵のように、ピザを5人で等しく分けたら、ひとり分はどのように表せるでしょうか。また、割り算であらわしてみましょう。

（ピザを5等分した図を提示するとよい）

問2　絵のように、1 ℓのジュースを7人で等しく分けたら、1人分はどのようにあらわせるでしょうか。また、割り算であらわしてみましょう。

（1 ℓのジュースの絵を提示する）

問3　次の分数を、割り算で表しましょう。

$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{13}$、$\frac{1}{20}$、$\frac{1}{15}$

問4　次の割り算の結果を分数で表しましょう。

①　1÷5　②　1÷6　③　1÷9

④　1÷10　⑤　1÷2

(6) 割り算と分数（ⅱ）$2 \div 5 = \frac{2}{5}$

割り算の意味には2つの異なる意味があることを、（ⅰ）でまとめた。

はじめは、等分除の意味で考えるのがわかりやすい。花壇にまく水が8 ℓ必要なとき、4人でまくには1人あたり何 ℓの水をまく必要があるかは、割り算で表せた。

8 ℓ÷4人＝2 ℓ/人

「2 ℓの水を5人でまくにも、同じように割り算で次のように表しましょう。

2 ℓ÷5人＝？　ℓ／人

答えはどのように求められるでしょうか。自分

で考えてみましょう。」と問題提起する。試行錯誤の議論の末、またその途中で図を書いて考え、議論すれば、答えは次第に明確になってくる。

図を描いてみればすぐにわかるように、2ℓを5つに分けるのであるから、1ℓずつを見ても5つに分けているので、$\frac{1}{5}$ℓになり、それが2つ分あるので、$\frac{2}{5}$ℓということになる。

まとめると次のようになる。

$$2\ \ell \div 5\text{人} = \frac{2}{5}\ \ell／\text{人}$$

$$2 \div 5 = \frac{2}{5}$$

このようにして、分数を学ぶ前に認識していた「割り算の結果は、すべて、分数で表せる」という新たな認識へと高まっていく。

割り算の意味を、「包含除」に設定して考えても同様である。花壇1㎡当たり5ℓの水をまくとする。2ℓの水しかない場合、何㎡の花壇に水がまけるだろうか。答えは次のような計算で求められるはずである。

$$2\ \ell \div 5\ \ell／\text{m}^2 = ?\ \text{m}^2$$

実際の答えは、図を書いて考えれば道が開けてくる。1㎡当たり5ℓの水をまくのであるが、2ℓしかないので、1㎡を5つに分けた2つ分の花壇にしか水がまけないことになる。つまり、$\frac{2}{5}$㎡の花壇に水がまけることになる。

以上、割り算の2つの意味のどちらで考えても、次の式が成り立つことがわかる。

$$2 \div 5 = \frac{2}{5}$$

この結果、「割り算の結果は、すべて分数で表せる」ことになる。

問1　次の割り算の結果を、分数を使ってあらわしましょう。

① 7 ÷ 8

② 5 ÷ 9

③ 6 ÷ 7

問2　次の分数を、割り算で表しましょう。

①$\frac{4}{9}$、②$\frac{3}{10}$、③$\frac{5}{6}$

(7)　分数の異なる表現形態、「約分」

整数や少数と異なる、分数の難しさのひとつが、同じ大きさを表す分数がいくつでも存在することである。たとえば、1個のりんごを2つに分けた1つ分と、4つに分けた2つ分を比べてみれば、りんごの量は同じであることがすぐにわかる。2つに分けたものと、それぞれをさらに2つにわけたものとを比較すると、最初の1つ分と後の2つ分が同じりんごの量になるのである。これを分数を用いて表せば次のようになる。$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$

あるいは逆に、$\frac{2}{4}=\frac{2\div2}{4\div2}=\frac{1}{2}$

分母と分子を2で割ることを、「2で約分する」という。

$\frac{1}{2}$から$\frac{2}{4}$を得るときは分母と分子に共通に2をかけたが、3をかけても、4をかけても同じことなので、無限の表現形態をもつことがわかる。

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{1\times4}{2\times4}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{1\times6}{2\times6}=\frac{1\times7}{2\times7}=\cdots$$

問1　次の分数をできるだけ約分し、分母、分子の数をできるだけ小さな数にしよう。

① $\frac{4}{8}$　② $\frac{5}{10}$　③ $\frac{4}{6}$

④ $\frac{3}{12}$　⑤ $\frac{4}{12}$　⑥ $\frac{10}{20}$

問2　次の分数で□に入る数はいくらか。

① $\frac{2}{5}=\frac{8}{\square}$　　② $\frac{2}{5}=\frac{\square}{40}$

(8)「2の$\frac{1}{3}$倍」＝「2の$\frac{1}{3}$」＝2×$\frac{1}{3}$＝$\frac{2}{3}$＝2÷3

ここで、かけ算を扱うのに先立ち、かけ算の量的な意味を確認しておくとよい。

「1人あたり2ℓの水を花壇にまくとき、4人では何ℓの水をまくことになるでしょうか？」という問題は、次のような掛け算であ

る。

$$2\ \ell／人\times 4\ 人 = 8\ \ell$$

このかけ算は、簡単に、2 ℓ × 4 = 8 ℓと書き、「2 ℓの4倍は8 ℓ」とすることもできる。もう一つ整数の掛け算を思い出しておく。「1㎡あたりの花壇に2 ℓの水をまくことにします。3㎡に同じように水をまくには何ℓの水が必要でしょうか？」これは次のような掛け算で求められることを確認しておこう。

$$2\ \ell/\text{㎡}\times 3\ \text{㎡} = 6\ \ell$$

$$2\ \ell\times 3 = 6\ \ell$$

$$2\ \ell の 3 倍は 6\ \ell$$

2 × 3 = 6、2の3倍は6なので、6 ℓ

これも図で表すとわかりやすくなる。

かけざんは、図で表すと、横に1の所にのっていた縦の量が、横が3とか4になったときの縦の量を求める演算として理解できる。

このようなかけ算を、次のような分数を用いる場合に適用するのが自然な認識である。

「1㎡あたりの花壇に2 ℓの水をまくことにします。$\frac{1}{3}$㎡に同じように水をまくには何ℓの水が必要でしょうか？」これも次のような掛け算で表す。

$$2\ \ell／\text{㎡}\times\frac{1}{3}\text{㎡} = ?\ \ell$$

$$2\ \ell\times\frac{1}{3} = ?\ \ell$$

$$2\ \ell の\frac{1}{3}倍は ?\ \ell$$

$$2\times\frac{1}{3} = ?$$

これも図で表してみると結果が自然に見えてくる。

1㎡のところに2 ℓがあり、$\frac{1}{3}$㎡のところには何ℓがあるかということであるから、2 ℓを3つに分けた量だけあることになり、2 ℓ ÷ 3 $= \frac{2}{3}$ ℓと同一の量になる。つまり、次の式がなりたつことが認識される。

$$2\ \ell\times\frac{1}{3} = 2\ \ell\div 3 = \frac{2}{3}\ \ell$$

「3で割ることと、$\frac{1}{3}$をかけることは同じこと」という、高度な認識に到達する。

2 ℓに$\frac{1}{3}$をかけることを、「2 ℓの$\frac{1}{3}$倍を求める」、あるいは簡単に、「2 ℓの$\frac{1}{3}$を求める」とも表現する。「2 ℓを3つに分けた1つ分を求める」とも表現できる。「Aの何分のいくつ」を求める概念は、単位分数に限らない。

「5 ℓの$\frac{2}{3}$倍」や、「5 ℓの$\frac{2}{3}$」も同じように、「5 ℓを3つに分けた2つ分」を表している。その結果は、「5 ℓを3つに分けた1つ分を2つ集めたもの、2倍」であるから、次のようになる。

$$5\ \ell\times\frac{2}{3} = \frac{5}{3}\ \ell\times 2 = \frac{5\times 2}{3}\ \ell = \frac{10}{3}\ \ell$$

数の計算で表せば、次のようになる。

$$5\times\frac{2}{3} = \frac{5}{3}\times 2 = \frac{5\times 2}{3} = \frac{10}{3}$$

問1　次の量または数を求めましょう。

①　4 ℓの$\frac{2}{5}$　②　2個のりんごの$\frac{2}{3}$

③　8の$\frac{3}{5}$　④　7の$\frac{2}{10}$

問2　次のかけ算を、割り算と分数で表してみましょう。

①　$5\times\frac{1}{4}$　②　$6\times\frac{1}{5}$

問3　次の割り算を、かけ算と分数で表しましょう。

①　5 ÷ 2　②　4 ÷ 5

(9) 単位分数×単位分数、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3\times 2}$

かけ算の量的な意味からはじめる。1㎡当たり$\frac{1}{3}$ ℓの水を花壇にまくとする。$\frac{1}{2}$㎡では、何ℓの水が必要でしょうか。という課題は、次の式で表せる。

$$\frac{1}{3}\ \ell／\text{㎡}\times\frac{1}{2}\text{㎡} = ?\ \ell$$

1㎡当たりで考えると、$\frac{1}{3}$ ℓ、つまり、1 ℓを3つに分けた水である。$\frac{1}{2}$㎡では、さらに2つに分けた量であるから、「3つに分けたものをさらに2つに分けると、6個になる」という原理から、ということになる。つまり、次の式が

成り立つ。 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3\times2}$

問１　次の量を１つの分数量で表しましょう。

$\frac{1}{4}$ ℓ／㎡×$\frac{1}{3}$㎡＝？

問２　次の分数のかけ算をして、ひとつの分数で表しましょう。

①　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$　②　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$　③　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$

（10）分数×分数　$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}$

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$は、どのような方法で計算すればよいかを発見・認識させる。はじめに量的なかけ算の意味を適用すると次のようになる。毎分$\frac{2}{3}$m進む小動物がいる。$\frac{4}{5}$分では何m進むであろうかを考える。

$\frac{2}{3}$m／分×$\frac{4}{5}$分＝

$\frac{4}{5}$をかけるということは、５つに分けた４つ分を求めることであった。$\frac{2}{3}$を５つに分けることは分母に５をかけることであり、それを２つ分求めることは、分子に２をかけることである。このことは図を書いて考えればさらにわかりやすい。このことから、次の計算方法が認識されてくる。

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$$

問１　次の分数のかけ算をやって、ひとつの分数で表しましょう。

①　$\frac{3}{4}\times\frac{7}{11}$　②　$\frac{5}{6}\times\frac{7}{9}$　③　$\frac{2}{7}\times\frac{3}{13}$

問２　次の分数のかけ算をやって、最後は約分し、簡単な分数で表しましょう。

①　$\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}$　②　$\frac{5}{6}\times\frac{2}{9}$　③　$\frac{2}{7}\times\frac{3}{14}$

問２の計算で、計算してから約分するよりは、いつ分母と分子を同じ数で割ってもよいのであるから、分母と分子とも、かけ算をする前に同じ数で割って約分しておいたほうがやさしく扱えるであろう。この方法で同じ問題をもう一度やってみるとよい。

（11）整数÷単位分数　$2\div\frac{1}{3}=2\times3$

この計算原理を見出すには、やはり量的な２つの意味を基礎にするのが合理的である。

（ｉ）　等分除に基づく割り算

８個のキャラメルを４人で等しく分けたとき、１人分を求める計算であった。

８個÷４人＝２個／人

普遍単位の例では、８ℓの水を、４㎡の畑にまくとき、１㎡当たりにまく水の量を求める計算である。

８ℓ÷４㎡＝２ℓ／㎡

これをそのまま、分数量にも適用すればよい。「２ℓの水を、$\frac{1}{3}$㎡の畑にまく。１㎡当たりにまく水の量を求める」という課題を解決すればよい。２ℓ÷$\frac{1}{3}$㎡＝？ℓ／㎡

$\frac{1}{3}$㎡と、１㎡を比べれば、３倍である。従って、$\frac{1}{3}$㎡にまく水の量２ℓを３倍すれば１㎡にまく水の量になる。

２ℓ÷$\frac{1}{3}$㎡＝（２ℓ×３）／㎡＝６ℓ／㎡

数だけで表せば次のようになる。

$2\div\frac{1}{3}=2\times3=6$

「$\frac{1}{3}$で割るということは、$\frac{1}{3}$にある量を１に引き伸ばすことであるから、３倍することになる」という理解が得られることを目指す。

（ⅱ）　包含除の意味で考える

「包含除」とは、例えば、キャラメルが８個あり、１人当たり２個のキャラメルと与えるとすると、何人に与えられるだろうかというものである。

８個÷２個／人＝４人

これは、普遍単位の量になっても同じことである。「８ℓの水を、畑１㎡当たり２ℓまくとすると、何㎡の畑にまくことができるだろうか」、でも同じことである。

$$8\ \ell \div 2\ \ell／\text{㎡} = 4\ \text{㎡}$$

さらに、これらの量が分数量になっても同じことである。「2 ℓの水を、畑1㎡当たり$\frac{1}{3}$ℓまくとすると、何㎡の畑にまけるだろう？」を式で表すと次のようになる。

$$2\ \ell \div \frac{1}{3}\ \ell／\text{㎡} \quad = ?\ \text{㎡}$$

これは、2 ℓの中に$\frac{1}{3}$ℓ／分がどのくらい入っているかと同じことで考えられる。1 ℓの中には$\frac{1}{3}$ℓ／は3個入っている。2 ℓの中にはその3倍の6 ℓが入っている。

$$2\ell \div \frac{1}{3}\ \ell／\text{㎡} = (2 \times 3)\ \text{㎡} = 6\ \text{㎡}$$

$$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 6$$

割り算の2つの意味のどちらで考えても、$\frac{1}{3}$で割ることは、3倍することと同じことであると理解できる。

（12）分数÷単位分数　$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times 3$

ある数を単位分数で割るのに、（11）では、わかりやすく「整数÷単位分数」から導入した。しかし、本質的なところは、「単位分数で割るのは逆数の整数をかけること」であるから、分数÷単位分数も容易に理解できるであろう。ここでは割り算の意味として、等分除の方だけにする。

「$\frac{2}{5}$ℓの水を、$\frac{1}{3}$㎡の畑にまく。1㎡当たりにまく水の量を求める」という課題を解決すればよい。

$$\frac{2}{5}\ \ell \div \frac{1}{3}\text{㎡} = ?\ \ell／\text{㎡}$$

$\frac{1}{3}$㎡と1㎡を比べれば、3倍である。従って、$\frac{1}{3}$㎡にまく水の量ℓを3倍すれば1㎡にまく水の量になる。

$$\frac{2}{5}\ \ell \div \frac{1}{3}\text{㎡} = \left(\frac{2}{5}\ \ell \times 3\right)／\text{㎡} = \frac{6}{5}\ \ell/\text{㎡}$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$$

（13）分数÷分数　$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$

「$\frac{2}{5}$ℓの水を、$\frac{3}{7}$㎡の畑にまく。1㎡当たりにまく水の量を求める」という課題を解決すればよい。

$$\frac{2}{5}\ \ell \div \frac{3}{7}\text{㎡} = ?\ \ell/\text{㎡}$$

$\frac{3}{7}$㎡と、1㎡を比べれば、$\frac{3}{7}$倍である。逆に、$\frac{3}{7}$㎡を$\frac{7}{3}$倍すれば1㎡になる。従って、$\frac{3}{7}$㎡にまく水の量$\frac{2}{5}$ℓを$\frac{7}{3}$を倍すれば1㎡にまく水の量になる。

$$\frac{2}{5}\ \ell \div \frac{3}{7}\text{㎡} = \left(\frac{2}{5}\ \ell \times \frac{7}{3}\right)／\text{㎡}$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$$

この関係も、図で表すといっそう考えやすくなる。「$\frac{3}{7}$で割るということは、$\frac{3}{7}$のところにある量を、1のところへ持ってくるのであるから、$\frac{7}{3}$倍すればよい。」ということがすっきり認識できるようにする。

（14）　分母が同じ分数の和・差

朝$\frac{2}{7}$ℓの水を飲みました、昼に$\frac{3}{7}$ℓの水を飲みました。あわせて何リットルの水を飲んだでしょうか。これは、7つに分けた水が、朝2つ分、昼3つ分であわせて2+3=5　5つ分であるから、計算式と答えの求め方は容易である。

$$\frac{2}{7}\ell + \frac{3}{7}\ell = \frac{2+3}{7}\ell$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7}$$

分母が同じ分数の差についても、分子同士の和を求めればよいことも容易にわかる。

（15）　分母が異なる分数の和・差

分母が異なる分数の和・差は、問題の意味は同様でわかりやすいが、計算の仕方に新たな思考が必要になる。

$\frac{2}{7}$ℓ＋$\frac{3}{5}$ℓをどのように考えるか。

分母が共通でなければそのままでは足し算ができない。ここで思い起こすのが、分数は無限

の表現形態を持っているということである。7にいくつかをかけ、5にいくつかをかけて分母を共通にする。7には5をかけ、5には7をかければ共通の分母が得られる。

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{2\times5}{7\times5}+\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{10}{35}+\frac{21}{35}$$

分母が、6と9のような場合には、共通の分母として、6×9を選んでもよいが、6と9の最小公倍数である、18を選ぶほうが小さい数で足りて便利である。6×3＝18、9×2＝18を活用することを見出させる。

以上のような指導内容とプロセスにより、子どもが「分数の理解」を効果的に進める試案として提示した。この学習・指導原理による教材で、算数・数学の学習において、基礎的理解を促進できることを、子ども達の指導の中で再検証することが必要であると考える。

参考文献

新井邦二郎　1984　単位の発達の心理学的研究　風間書房

波多野完治　1993　ピアジェの発達心理学　国土社

波多野完治　1993　ピアジェの認識心理学　国土社

Piaget, J., Inhelder, B., Le développement des quantités chez l'enfant
滝沢・銀林　訳　翻訳　1992　量の発達心理学　国土社

Piaget, J., Szeminska, A., La genèse du nombre chez l'enfant
遠山・銀林・滝沢訳　1992　数の発達心理学　国土社

吉田　甫　1991　子どもは数をどのように理解しているか　新曜社

吉田　甫　多鹿秀継編著　1995　認知心理学からみた数の理解　北大路書房